

日 食 図 の 自 動 図 化

井上圭典*

AN AUTOMATIC DRAWING OF SOLAR ECLIPSE MAP

Keisuke Inoue

Received 1979 September 10

Abstract

A computer program for automatic drawing of an eclipse map by an XY-plotter has been developed. The present paper describes the process of the analysis for the program, showing some difficulties which have arisen in the course of the analysis, and the solutions which were adopted.

Examples of eclipse maps produced by this program are seen in the supplements to the Japanese Ephemeris for 1980 and 1981.

By combining this program with those for computing the coordinates of the Sun and the Moon, which are already available at the Hydrographic Department of Japan, the eclipse map can be drawn automatically for any eclipse in the past or in the future.

The time necessary to complete one eclipse map is at most 80 minutes, including both computing and plotting times.

1. 序 論

日食図作成のためには、非常に多量の計算処理が要求され、この計算結果を世界地図に記入して滑かな曲線を描く作業を経ねばならない。手回し計算器を使っていた時代には、日食の規模によって多少の相違はあるが、熟練した計算者でも一つの日食に対し半年ぐらいの日時を費していたものであり、計算が長大であるだけに誤算の防止に注ぐ労力もかなりの負担であった。

電子計算機の導入により、日食図の計算部分は比較的早く、1969年ころまでには電算化されたが、図化の部分は第3節に述べるような諸問題点があって作業が遅れていた。このたび、これらの問題点もようやく解決し、自動図化プログラムが完成した。これによって作業時間が極端に短縮され、労力が節減され、誤算の防止・成果の均質化等にも大きな効果があった。さらにこれまで時間や労力上の制約から不可能に近かった日食図に関連する研究が容易になったという利点も挙げられる。

日食図の自動図化に関し、米国海軍天文台 (USNO) では数年前に着手したというが完成したという報告はまだない。また、各国の天体暦発行機関でも自動図化が完成したという話はない。

以下、このプログラムの解析的な部分について報告する。

* 編暦課 (Astronomical Division)

2. 日食図とその意義

黄道と白道との交点付近で月・太陽が出合うと太陽・月・地球が空間ではほぼ一直線に並び、太陽からの光を月がさえぎってできる円錐状の影が地表に落ちた場合、この影の中では日食現象が見られる。この影の円錐（本影錐と半影錐との二つが必ず存在する）は、地球に対し相対的に西から東に向かって移動し、時の経過とともに連続的にその影を地表上に落とし続けてゆく。この間に地球も自転しているので、この両者の動きの合成結果が時刻々の影の位置を決めることになる。

地表に落ちた影の縁の線上から有限個の点を計算によって求め、これらを世界地図に記入し滑らかな曲線で結ぶことでその縁は描かれる。日食が継続する時間内の、ある瞬時に対し一つの曲線が対応するから、この時間内で無数の曲線が生ずることになる。この曲線群の中から、日食の見える範囲・日食状況・経過等が読み取れるように選び出して地図上に描いたものが日食図である。図はその目的によって精粗多種多様な描き方が考えられるが、ここでは標準的な日食図として、第4節のような線からなっているものを考える。

この日食図から、ある地点で日食現象が見られるかどうかの分かり、見えたとしたら、食の始めや終わりの時刻、最大食分、方向角等を読み取ることができる。つまり、ある食の状況を観測するための観測点の選定に役立つものでもある。

さらに日食図の重要な役割として、例えば古代の日食を図に再現することによって、月・太陽の運動理論の検証、採用天文定数の当否、地球自転の変動等の検討資料を提供することが挙げられる。実験もできず、繰返しもない日食は、さまざまな情報を込めているのであるから、その現象を伝える日食図は大きな意義を持つものである。各国の天体暦はそれぞれ特色をもって編集されているが、以上述べた日食図だけは必ず掲載されている。

3. 自動図化の方法と問題点

自動図化の方法・手順は幾通りも考えることができ、それに応じて生じる問題点も違ったものとなる。

一つの方法は次のとおりである。日食図は多い場合で6種類の曲線によって構成される（第6節参照）。これらの日食図各線上の有限個の点の経緯度を算出して、これらを電子計算機の記憶装置に記録しておく。所要のある一つの線の経緯度群をその中から拾い出す。この線が閉曲線とならない曲線分であれば、二つの端点があるから、すでに抽出した経緯度群の両端点として最初と最後に付加する。この線が他の線と交わったり接したりする場合には、これらの諸点の経緯度をその占めるべき位置に割り込ませる。こうしてこの線の経緯度群の並べ換えが終わってから出力し、次の線の並べ換えに移る。こうした作業を日食図各線それぞれに対して順次繰返して線ごとの経緯度群を得てゆく方法である。要するに計算結果の選択的な並べ換えを電子計算機で実行させることで、筆算時代の方法・手順をそのまま電子計算機に実行させようという発想である。

他の方法として、次のようなものも考えられる。日食図の各線は、(1) その曲線の一方の端点から始まり、時間の経過に従ってその形を決めつつ長さをのばし、もう一方の端点で終わる場合、(2) 瞬時に曲線が生ずる場合とがある。

(1)の場合は時間経過に従って生ずる通りに、(2)の場合はあるパラメータの増加するに従って生ずる通りに、それぞれ算出する。更に算出時ごとに、この線が他の線と交わるか接するかすることが分かっているならばその点も繰込めかどうかを判定し、繰込まれるべき時に繰入れて、この線上の有限個の点をその生ずる順に求めてゆき、これを完成する方法である。この場合、線上の各点は並べ換える必要はないので電子計算機の記憶装置に記録せず即時出力してしまいうることができる。要するに日食図の各線を「一筆書き」で完成してしまおうという発想である。

今回完成した自動図化プログラムは後者の方法を採用したが、そこで生ずる問題点とその解決策とを述べる。

日食図は大きく分類すると6種類の線, 5種類の端点とからなり, これらは別個に, 独立に計算することができ, 描くことができる. しかし, それによって日食図が正しく完成する訳ではない. 以下に述べるような不完全, 不正確な日食図となる.

(1)端点と線とがつながっていない. (2)当然1本の曲線とならなければならないのが, 中間で分断され空隙のある2本の線となる. (3)ある線が, 他の線上の点から出発しなければならないのに, そうはならない. (4)二つの曲線が1点で接しなければならないのに, 2点で交わる, 全然交わらない, 接しても接点がずれているといった現象を起こす. (5)二つの曲線が正しい位置で交差しない. (6)閉曲線であるべきなのに閉じない.

これらの問題点を解決するために以下のことを行った.

- (1) 日食図各線のあらゆる形を, その満たすべき条件によって分類する.
- (2) 総合的判断を要する場面ごとに, 複合した条件を単純な条件にまで分解する.
- (3) 単純な条件判断を組み合わせてトリー(木構造)を構成させ, 複合条件の総合的判断を誤りなく下せるようにする.
- (4) 方程式の根をより正確に求める方法を開発する.

これらを第4節以下に具体的に述べる.

4. 日食図各線の分類

標準的な日食図を例にして, 一覧表の形で各端点, 各曲線の分類をした. 各線の形状, 日食図の中に占める位置等については Figure 1, 2, 3 を参照されたい. 分類1, 分類2のコードで①, ②, ……は端点, 10, 11, ……は線を意味する. このコードは第6節以下でも使用する(日食図の形から見た大分類に関しては Figure 5 参照. さらに, これより下位の小分類も多種考えられ, それぞれに図としての興味はあるが, 自動図化のための解析的な段階では不必要な分類であるから省略する).

分類1 日食図の各端点の名称, 満たさるべき条件

端点のコード	端 点 の 名 称	端点の条件
①	中心線の日出端点(日没になる場合もある)	A, SP (SM)
②	“ 日没端点(日出になる場合もある)	A, SM (SP)
③	金環食北限界線の日出端点(日没になる場合もある)*	BZ2, CM2, SP (SM)
④	“ “ 日没端点(日出になる場合もある)*	BZ2, CM2, SM (SP)
⑤	金環食南限界線の日出端点(日没になる場合もある)*	BZ2, CP2, SP (SM)
⑥	“ “ 日没端点(日出になる場合もある)*	BZ2, CP2, SM (SP)
⑦	分食北限界線の日出端点(日没になる場合もある)	BZ1, CM1, SP (SM)
⑧	“ “ 日没端点(日出になる場合もある)	BZ1, CM1, SM (SP)
⑨	“ 南限界線の日出端点(日没になる場合もある)	BZ1, CP1, SP (SM)
⑩	“ “ 日没端点(日出になる場合もある)	BZ1, CP1, SM (SP)
⑪	日出初き線の端点	BM1, DZ1, SP
⑫	日没復円線の端点	BP1, DZ1, SM
⑬	日出復円線の端点	BP1, DZ1, SP
⑭	日没初き線の端点	BM1, DZ1, SM
⑮	日出食甚線の時間的端点(⑦又は⑨と一致する場合がある) FZ, H1, SP	

端点のコード 端 点 の 名 称 端点の条件
 ⑩ 日没食甚線の時間的端点 (⑧又は⑩と一致する場合がある) FZ, H1, SM

* 皆既食の場合は南北が入れかわる.

分 類 2 日食図の各線の描かれる方向, 名称, 満たさるべき条件

線のコード	両端点と描く方向	線の名称	各線の条件
10	①→②	中心線	A
11	③→④	金環食北限界線*	CM2, BZ2
12	⑤→⑥	金環食南限界線*	CP2, BZ2
21	⑦→D→H→K→⑧	分食北限界線	CM1, BZ1
22	⑨→E→G→J→⑩	分食南限界線	CP1, BZ1
31	⑪→A→⑦	日出初き線	DP1, BM1, SP
31	⑦→C→⑬	日出復円線	DP1, BP1, SP
32	⑪→B→⑨	日出初き線	DM1, BM1, SP
32	⑨→F→⑬	日出復円線	DM1, BP1, SP
41	⑭→L→⑧	日没初き線	DM1, BM1, SM
41	⑧→N→⑫	日没復円線	DM1, BP1, SM
42	⑭→I→⑩	日没初き線	DP1, BM1, SM
42	⑩→M→⑫	日没復円線	DP1, BP1, SM
51	⑮→⑦	日出食甚線	FP, SP, H1
52	⑮→⑨	日出食甚線	FM, SP, H1
61	⑧→⑯	日没食甚線	FP, SM, H1
62	⑩→⑯	日没食甚線	FM, SM, H1
71	A→B	同時初き線	BP1
72	C→D→E→F	同時初き復円線	BP1, BM1
73	G→H→G	"	" "
74	I→J→K→L	"	" "
75	M→N	同時復円線	BM1

* 皆既食の場合は南北が入れかわる.

分類1, 2の端点, 線の名称は Figure 1 に対して与えられたものである. Figure 2, 3 の場合には, この分類と合わないこともある.

Figure 1, 2, 3 において A, B, …… , M, N 点は 2 線の交点または接点である. したがって両者の条件を同時に満足していなければならない. 分類1, 2の条件の欄の略記号の意味は, それぞれ以下のような条件式を満足することを表わしている. $i=1$ のときは半影錐, $i=2$ のときは本影錐を意味する. 式の意味は第6節を参照されたい. なお分類1, 2を通じて, 第5節の(3)式は必ず満たされるべき条件であるから省いてある.

$$A: \quad \xi=x, \quad \eta=y_1 \quad \zeta_1 = \sqrt{1-x^2-y_1^2} \geq 0$$

$$BPi: \quad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2-(li-\zeta \tan fi)^2=0 \quad \text{かつ} \quad \dot{d} > 0$$

$$BMi: \quad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2-(li-\zeta \tan fi)^2=0 \quad \text{かつ} \quad \dot{d} < 0$$

$$BZi: \quad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2-(li-\zeta \tan fi)^2=0 \quad \text{かつ} \quad \dot{d} = 0$$

$$\text{CPi: } (x-\xi)(\dot{x}-\dot{\xi})+(y-\eta)(\dot{y}-\dot{\eta})-(l_i-\zeta \tan f_i)(\dot{l}_i-\dot{\zeta} \tan f_i)=0 \text{ かつ } \sec Q>0$$

$$\text{CMi: } (x-\xi)(\dot{x}-\dot{\xi})+(y-\eta)(\dot{y}-\dot{\eta})-(l_i-\zeta \tan f_i)(\dot{l}_i-\dot{\zeta} \tan f_i)=0 \text{ かつ } \sec Q<0$$

$$\text{DPi: } (l_i-\zeta \tan f_i)^2-(m-p)^2>0 \text{ かつ } P-M>0$$

$$\text{DMi: } (l_i-\zeta \tan f_i)^2-(m-p)^2>0 \text{ かつ } P-M<0$$

$$\text{DZi: } (l_i-\zeta \tan f_i)^2-(m-p)^2>0 \text{ かつ } P-M=0$$

$$\text{FP: } (x-\xi)(\dot{x}-\dot{\xi})+(y-\eta)(\dot{y}-\dot{\eta})=0 \text{ かつ } \alpha>0$$

$$\text{FM: } (x-\xi)(\dot{x}-\dot{\xi})+(y-\eta)(\dot{y}-\dot{\eta})=0 \text{ かつ } \alpha<0$$

$$\text{FZ: } (x-\xi)(\dot{x}-\dot{\xi})+(y-\eta)(\dot{y}-\dot{\eta})=0 \text{ かつ } \alpha=0$$

$$\text{Hi: } (x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \leq L_i^2$$

$$\text{SP: } \xi^2+\eta_1^2-1=0 \text{ かつ } \dot{\zeta}>0$$

$$\text{SM: } \xi^2+\eta_1^2-1=0 \text{ かつ } \dot{\zeta}<0$$

5. ベッセル座標系とベッセル要素

日食計算は地球楕円体と影の円錐との交線と、この交線が作る包絡線とを求めることにある。そして実際には空間曲面相互の切り口を平面上の二次曲線相互の交点の積み重なりとして解いてゆくのである。これを実行しやすいようにベッセル座標系が導入される訳で、この座標系の特徴は月影方向（その赤経赤緯は a, d ）すなわち月・太陽の各中心を通る直線が影の円錐の軸であり、この軸に平行で地心を通る直線を Z 軸とする点にある。こうすると空間で時々刻々に方向を変える月影方向の方向余弦は既知量となり、地球楕円体と影の円錐との相対的な位置は (x, y) で定まってしまう。さらに影の円錐を xy 平面（これをベッセル基準面と呼ぶ）に平行な平面で截った切り口は (x, y) を中心とした円となり、この半径 L は円錐の頂角の半分を f とすれば $L=l-\zeta \tan f$ となる。 l は xy 平面上の影の半径、 ζ は xy 平面から今考えた平面までの距離である。

$x, y, l, \tan f$ を知れば上記二次曲線の交点 (ξ, η, ζ) は ζ をパラメータとして

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=(l-\zeta \tan f)^2 \quad (1)$$

$$\xi^2+\eta^2=\rho^2-\zeta^2 \quad (2)$$

を解いて得られる。しかし(2)式の右辺の ρ は求めようとする地点の緯度の関数であるから、ベッセルは(2)式を座標変換によって

$$\xi^2+\eta_1^2=1-\zeta_1^2 \quad (3)$$

の式とした。これは地球楕円体上の点 (ξ, η, ζ) を半径 1 の球面上の点 (ξ, η_1, ζ_1) に移すことを意味する。(1), (3)式を連立させて解いた ξ, η_1, ζ_1 を経緯度で表すためには、月影方向の暦表時角すなわち暦表子午線上の地点での時角 μ が知られていなければならない。この μ と $x, y, l, \tan f, \sin d, \cos d$ をベッセル要素と称している。このベッセル要素と(1), (3)式の解 ξ, η_1, ζ_1 (この解のうち虚根、無縁根は除いて) とから経度 λ 、緯度 φ が次式によって得られる。

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi_1 \sin \theta &= \xi \\ \cos \varphi_1 \cos \theta &= -\eta_1 \sin d_1 + \zeta_1 \cos d_1 \\ \sin \varphi_1 &= \eta_1 \cos d_1 + \zeta_1 \sin d_1 \\ \lambda &= \mu + \theta \\ \varphi &= \tan^{-1}(\tan \varphi_1 / \sqrt{1-e^2}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ただし e は地球楕円体の離心率で, $\sin d_1, \cos d_1, \rho_1$ は

$$\left. \begin{aligned} \sin d_1 &= \sin d / \rho_1 \\ \cos d_1 &= \sqrt{1-e^2} \cos d / \rho_1 \\ \rho_1^2 &= 1-e^2 \cos^2 d \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

から得られる.

なお ξ, η, ζ と ξ_1, η_1, ζ_1 の関係は

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= \eta / \rho_1 \\ \zeta_1 &= \sqrt{1-\xi^2-\eta^2} \\ \zeta &= (\sqrt{1-e^2} \zeta_1 - e^2 \sin d \cos d \eta_1) / \rho_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

である.

第6節では各線の計算式を ξ, η, ζ までにとどめ, それ以後の計算は(4)~(6)式による単なる座標変換でほとんど同一であるから省略してある.

また, 日食時には月影方向と太陽方向とはせいぜい $\tan^{-1}(\pi_{\odot}/\pi_{\bullet}) \simeq 0^\circ.147$ 程度しか変わらないので, ある地点での太陽高度を月影方向の高度で代用している. 月影方向の高度 alt は

$$alt = \sin^{-1}(\sin \varphi \sin d + \cos \varphi \cos d \cos \theta)$$

であるが, $\sin alt$ と ζ_1 との間には

$$\zeta_1 = \sqrt{1-e^2} \sin alt / (\rho_1 \sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}) \quad (7)$$

の関係があることから, 日出日没条件 $\sin alt = 0$ は $\zeta_1 = 0$ で代用できる. $\zeta_1 = 0$ は一つの平面を表すが, 地球上の点であるかぎり $\xi^2 + \eta^2 - 1 = 0$ となる.

6. 各線の計算式

(a) 中心線 (線コード10, 端点コード①, ②, コードの意味は第4節参照)

ある時刻の中心線上の一点 (ξ, η, ζ) は, その時刻の月影円錐の軸と地球楕円体との交点のうちの一つである. すなわち $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = 0$ から

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= y \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

かつ $\zeta_1 > 0$ を満足させる ξ, η である. この中心線の両端点の時刻は未知であるから(8)式と $\zeta_1 = 0$ を満たす時刻を求め, この時刻に対する ξ, η_1 を計算して端点を得る.

(b) 皆既(金環)食限界線 (線コード11, 12, 端点コード③, ④, ⑤, ⑥)

ある時刻の本影錐とベッセル基準面に平行で距離 ζ にある平面との交線は円

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - (l_2 - \zeta \tan f_2)^2 = 0 \quad (9)$$

となる. この(9)式と(3)式とを連立させて得た解 (ξ, η, ζ) は本影錐と地球楕円体上との交線上の1点である. この交線は時間経過とともに地表上を移動するが, この曲線群によって1本又は2本の包絡線が地表に生ずる. これが限界線である(限界線はFigure 5に見られるように通常は南北に2本現れるが, その一方を欠く型となることも多い. 以下の記述ではその都度断ることを省略する.).

この線上に ξ, η, ζ が存在する条件は

$$(x-\xi)(\dot{x}-\dot{\xi}) + (y-\eta)(\dot{y}-\dot{\eta}) - (l_2 - \zeta \tan f_2)(\dot{l}_2 - \dot{\zeta} \tan f_2) = 0 \quad (10)$$

である. $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ は未知数 ξ, η, ζ の時間微分であるが, ξ, η, ζ が地表上にある限り

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{\mu}(-\eta \sin d + \zeta \cos d) \\ \dot{\eta} &= \dot{\mu} \xi \sin d - \dot{d} \zeta \\ \dot{\zeta} &= -\dot{\mu} \xi \cos d + \dot{d} \zeta \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

であるから未知数の数は増えない。

補助角 Q (Q のベッセル基準面上, および天球上における幾何学的意味は第 4a, 4b 図のとおりであって, 実は月影方向から月の中心へ向かう北極方向角である。) を

$$\left. \begin{aligned} x - \xi &= (l_2 - \zeta \tan f_2) \sin Q \\ y - \eta &= (l_2 - \zeta \tan f_2) \cos Q \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

によって導入すると, これは(9)式を満足させ, (12)式を(10)式に入れて整理すると,

$$\tan Q = (B - \zeta \sec^2 f_2 \dot{d} - A \sec Q) / (C - \zeta \cos d \sec^2 f_2 \dot{\mu}) \quad (13)$$

となつて, $\tan Q$ を求めることに帰する。ただし A, B, C は

$$\left. \begin{aligned} A &= -\dot{l}_2 - x \cos d \tan f_2 \dot{\mu} + y \tan f_2 \dot{d} \\ B &= -\dot{y} + x \sin d \dot{\mu} + l_2 \tan f_2 \dot{d} \\ C &= \dot{x} + (y \sin d + l_2 \tan f_2 \cos d) \dot{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

である。(13)式の右辺に未知量 Q, ζ が入っているので逐次近似法によって解く。限界線上の点である限り $\sec Q$ は +1 又は -1 に近い値をとり, ζ は 0~1 の範囲の値をとるから, 出発値として $\zeta=0, \sec Q=\pm 1$ を採用する。

(13)式の収束値が限界線上の $\tan Q$ を与え, これから(12)式により, $\sec Q > 0, \sec Q < 0$ に対応して2点の ξ, η が求まる。これらの点を連ねた曲線が南北限界線となる。これらはそれぞれ両端をもっているが, その端点の時刻は未知であるから, 限界線上にあり, かつ $\zeta_1=0$ を満足させる時刻を求める。この時刻に対する ξ, η から端点の経緯度が得られる。

(c) 分食限界線 (線コード 21, 22, 端点コード ⑦, ⑧, ⑨, ⑩)

(9), (10), (12), (13), (14)式で, $l_2, \tan f_2, \sec f_2$ を $l_1, \tan f_1, \sec f_1$ にして求めた解が分食南北限界線上の点である。端点についても同様である。

(d) 日没食甚線 (線コード 51, 52, 61, 62, 端点コード ⑬, ⑭, ⑰, ⑱, ⑲, ⑳, Figure 6)

この線上の点では, 日没時に食分が最大となる。すなわち $\zeta_1=0, \dot{D}=0$ を同時に満たす地点である。ここに $D=(L_1 - \Delta)/(L_1 + L_2), L_1=l_1 - \zeta \tan f_1, L_2=l_2 - \zeta \tan f_2, \Delta^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$ である。

補助角 Q を $x-\xi=\Delta \sin Q, y-\eta=\Delta \cos Q$ のように導入すると, $\dot{D}=0$ は

$$\tan Q = \frac{\sec Q \{ \dot{L}_1 L_2 - \dot{L}_2 L_1 + (\dot{L}_1 + \dot{L}_2) \Delta \} - (L_1 + L_2) (\dot{y} - \dot{\eta})}{(L_1 + L_2) (x - \xi)} \quad (15)$$

となる。これを变形したのが筆算時代の計算式であるが, それを適用して逐次近似法で解を求めてゆくと, 解があるのに収束せず発散することがある。電子計算機で実行させる場合, 逐次近似の繰返し回数の上限を決めれば一つの解決法となるが, ここでは(15)式の微小項を省略して

$$(x-\xi)(\dot{x}-\dot{\xi}) + (y-\eta)(\dot{y}-\dot{\eta}) = 0 \quad (16)$$

であることを $\dot{D}=0$ の条件式とした。これはベッセル基準面上でベクトル $(x-\xi, y-\eta)$ とベクトル $(\dot{x}-\dot{\xi}, \dot{y}-\dot{\eta})$ とのスカラー積が 0, すなわち直交することを意味する。

(16)を満足する ξ, η を求める方法として, $M=\tan^{-1}(x/y)$ によって M を求め, α をパラメータとして

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sin(M \pm \alpha) \\ \eta_1 &= \cos(M \pm \alpha) \end{aligned} \right\} (\alpha > 0) \tag{17}$$

よって ξ, η_1 を、この ξ, η_1 を用い(6), (11)式から $\dot{\xi}, \dot{\eta}$ を求めて $K = (x - \xi)(\dot{x} - \dot{\xi}) + (y - \eta)(\dot{y} - \dot{\eta})$ を計算する。一般に $K \neq 0$ であるが、 $K = 0$ になるせいぜい2個の $\alpha_1, -\alpha_2 (\alpha_1, \alpha_2 > 0)$ が見つければ、この $\alpha_1, -\alpha_2$ に対する2組の (ξ, η) が日出没食甚線上の点である。勿論 $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \leq L_1^2$ を満足させない ξ, η は捨てる。

ある時刻に対し、この線上の2点が存在するならば、端点⑩又は⑪は必ずその付近で見つかる。どの時刻に対しても1点しか存在しなければ端点⑩, ⑪いずれも存在しない。詳細は第8節参照(従来、端点⑩, ⑪は計算していなかったが、第3節で述べた方法を採用する限り必要な点である。これを仮に日出没食甚線の時間的端点と名づける)。

(e) 同時初き復円線 (線コード71, 72, 73, 74, 75, 端点記号A, B, C, F, I, L, M, N, Figure 7)

ある時刻の地球楕円体と半影錐との交線のうち次式を満足させる ξ, η_1, ζ_1 が同時初き復円線上の点である。

$$\left. \begin{aligned} (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 &= (l_1 - \zeta \tan f_1)^2 \\ \zeta_1 &= \sqrt{1 - \xi^2 - \eta_1^2} \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

これを解くために補助角 Q をパラメータとして

$$\left. \begin{aligned} \eta &= x - (l_1 - \zeta \tan f_1) \sin Q \\ \eta &= y - (l_1 - \zeta \tan f_1) \cos Q \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

の式から逐次近似法によって(19)式を満たす ξ, η, ζ を求める。出発値として $\zeta = 0$ を採用し、解が得られない場合には $\zeta = 1$ を出発値として再度解を求め、それでも解がない場合はじめて、その Q に対する解はないと判定する。この時刻に(f)線すなわち日出没初き復円線上の2点が存在すれば、それを両端点とする曲線となる。さらにこの線は一般に(c)線すなわち分食限界線と2点で接している。詳しくは第8節参照。

(f) 日出没初き復円線 (線コード31, 32, 41, 42, 端点コード⑫, ⑬, ⑭, Figure 8)

ある時刻の地球楕円体と半影円錐との交線は楕円体上に閉じた曲線となるが、このうち $\zeta_1 < 0$ となる点は太陽を地平線下に見る地点であるから捨てる。 $\zeta_1 > 0$ となる点が(e)の同時初き復円線上の点であり、 $\zeta_1 = 0$ になる2点が出没初き復円線上の2点である。

$M = \tan^{-1}(x/y)$, $m = \sqrt{x^2 + y^2}$ によって M, m を定め、

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{P-M}{2} &= \pm \sqrt{\frac{(l_1 - \zeta \tan f_1)^2 - (m-p)^2}{4mp}} \\ p &= \sqrt{1 - e^2 \cos^2 d} / \sqrt{(1 - e^2) \sin^2 P + \cos^2 P} \\ \xi &= p \sin P \\ \eta &= p \cos P \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

から ξ, η を逐次近似法によって求める。出発値は $\zeta = 0, p = 1$ とする。一般に $\sin\{(P-M)/2\} > 0$ と $\sin\{(P-M)/2\} < 0$ との二つの解があるが、時間の経過とともに解の数は次のように変動する。

解の数	0	1	2	[1	0	1]	2	1	0
端点コード		⑫		[⑬		⑭]		⑮	

括弧の中の解が存在しない場合もあり、Figure 5 のII~V型がこの場合の日食図の型である。端点⑫, ⑮の

時刻では⑱式, 端点⑬, ⑭の時刻では㉒式を満足する.

$$m-p-l_1+\zeta \tan f_1=0 \quad \text{㉑}$$

$$m-p+l_1-\zeta \tan f_1=0 \quad \text{㉒}$$

7. 日食図の分類

日食図は㉑, ㉒式の解の有無, (a)の中心線の有無によって次のように分類される (Figure 5 参照).

型	分類	日食図の特徴
I	㉒式の解がある	第6節の(a)~(f)線全部がある. (d)は2本に, (f)は2つの閉曲線にそれぞれ分離される. (e)線の閉曲線も存在する.
II	㉒式の解がなく, ㉑式の解はある (a)線がある (b)線 2本がある	(c)線のどちらか1本がある. (d)は1本の曲線に, (f)は1つの閉曲線になる. (e)の閉曲線は存在しない.
III	(b)線 1本だけある (a)線がない	
IV	(b)線 1本だけある	
V	(b)線 ない	

8. 各線の分類

第6節の(a), (b), (c)の各線は, 存在するか否かの二者択一であるから自動図化という点から単純な判断ですむ. (d), (e), (f)の各線は流れ図1, 2, 3のような判断のトリーで分類してプログラム化した.

9. 区間縮小法

日食計算では $f(x)=0$ の根, および $f'(x)=0$ の根を求めるとい場合がしばしばある. 実根の数は0個, 1個, 2個のうちのいずれかという比較的単純な方程式であるが, 根の付近で $f'(x)$ が零に近い場合を解かねばならないことが必ずある.

一般に根を求める方法として

(i) $f(x)$ を多項式 $P(x)$ で近似させ, $P(x)=0$ の根をもって代用する.

(ii) 2分法によって零点を見つける.

(iii) ニュートン法に代表される逐次近似値法による.

などが考えられるが, 日食計算の場合は以下のような理由で電子計算機によって根を求める場合いずれも不適当と考えられるので独自の方法を用いることにした.

(i)の場合 $P(x)$ の零点と $f(x)$ の零点との相違が無視し得なくなる場合が生じ, 極端な場合 $P(x)$ に零点はあるが, 実際には $f(x)$ の零点がない, この逆に $P(x)$ の零点はないが, 実際には $f(x)$ に零点があるというようなことが起きる.

(iii)の場合 方法としては確実であるが, 零点を見つける過程で, 区切りの目が粗いとその間に2根が入ってし

まい、根なしという判断をする可能性が生ずる。それを回避するためには区切り目を密にする他ないが、無駄な計算を多数回実行しなければならなくなる。この無駄を省くために2分法適用の区間を狭めてから実行すればよいようだが、その見当をつけるための判断は容易でない。

Ⅲの場合 $f'(x)$ を分母にもつ分数式から近似値を求めるが、 $f'(x) \neq 0$ 付近の根の場合、近似値の数列が発散する可能性があり、収束したとしても精度の悪い根が得られる。

本プログラムでは、日食計算に登場する $f(x)$ が比較的簡単な関数で解析的な表示で与えられており、 $f'(x)$ も容易に求まることを考慮し、日食の継続する時間内では、 $f(x)$ をすべて下に凸な関数に変形し、はじめに

$$(a) f(x)=0, f'(x)<0 \quad (b) f'(x)=0 \text{ 又は } f(x)=0, f'(x)=0 \quad (c) f(x)=0, f'(x)>0$$

となる点を含む高々3個の区間を下記の方法で見つけ出し、この区間を更に10分割して再び下記の方法で(a), (b), (c)を満たす区間を見つけ出す等等、この手続きを繰返して各区間幅を徐々に狭めてゆく方法を使った。この繰返しの過程で(a), (b), (c)を満たす区間は分離され、3組の非常に狭い区間が見つげ出される。

上記(a), (b), (c)を満足する区間の選び出し方を下に示す。 x の関数 $f(x)$ があって、日食の時間中 $f'' > 0$ であり、かつ $f=0, f'=0$ になる x の値を見つけるために、 $x=A, B (A < B)$ での f, f' をそれぞれ f_A, f_B, f'_A, f'_B とすると、任意の閉区間 $[A, B]$ における $f=0, f'=0$ の根の有無を、次のように分類して判定する。

分類3 区間 $[A, B]$ における $f=0, f'=0$ の根の有無

分類番号	f_A の値	f_B の値	f'_A の値	f'_B の値	(a)等を満足させる点、又は区間		
					(a)	(b)	(c)
1	0	+	0	+	—	A	—
2	0	+	+	+	—	—	A
3	0	—	—	0	A	B	—
4	0	—	—	—	A	—	—
5	0	—	—	+	A	(A, B)	—
6	+	0	—	0	—	B	—
7	+	0	—	—	B	—	—
8	+	0	—	+	(A, B)	(A, B)	B
9	+	+	0	+	—	A	—
10	+	+	—	0	—	B	—
11※	+	+	—	+	(A, B)?	(A, B)	(A, B)?
12	+	—	—	0	(A, B)	B	—
13	+	—	—	+	(A, B)	(A, B)	—
14	+	—	—	—	(A, B)	—	—
15	—	0	+	+	—	—	B
16	—	+	0	+	—	A	(A, B)
17	—	+	+	+	—	—	(A, B)
18	—	+	—	+	—	(A, B)	(A, B)
19	—	—	—	0	—	B	—
20	—	—	—	+	—	(A, B)	—
21	0	+	—	+	A	(A, B)	(A, B)
22	—	—	0	+	—	A	—
23	—	0	—	+	—	(A, B)	B
24	—	0	0	+	—	A	B
25	0	0	—	+	A	(A, B)	B

※ この場合には開区間 (A, B) 中に $f'=0$ を満たす根は必ずあるが $f=0$ を満たす根は2又は0である。

区間を縮小してゆくうちにどちらかであることが分かってくる。

分類3に現れた以外の組合せの場合はすべて、区間 $[A, B]$ 中では(a), (b), (c)のいずれも満足させない。

10. 結 語

このプログラムを用いて描いた日食図は、1980年、1981年の天体位置表付録にそれぞれ「1981～1985年の日食」「1986～1990年の日食」と題した日食予報資料の中の付図として掲載されている。ここでは一例として2012年5月20日の金環食図を第9図に掲げた。中心線が日本を通る一番近い将来の日食である。

プログラムの仕様のなことは一切触れなかったのでここで簡単に述べる。プログラムはフォートラン文で書き、主プログラムは2331ステートメント、サブルーチンは29個で延べ1242ステートメント、総計3573ステートメント、完成時の電子計算機はNEAC2200/500であったが、現在はACOS700であるので、そのためのプログラム変換を行った。月・太陽のデータは電子計算機から得られた出力を入力として使用しているが、将来は月・太陽の各プログラムと自動図化プログラムとを連結してゆく予定である。

所要時間は、日食の規模によってかなり変動するが、日食図各線の経緯度群を完成し磁気テープに記録するまで10分、この経緯度群をXYプロッター用に変換し、さらに地球の経緯線、世界地図線の xy 座標への変換をも合わせて30分、XYプロッターで日食図各線、経緯線、世界地図を描くのに40分、総所要時間は最大で80分である。作業開始は1975年夏、完成は1977年秋であった。

このプログラムのXYプロッター用のための変換と経緯線、世界地図記入の部分のプログラムに関しては小野寺健英氏に、例題の計算とXYプロッターによる日食図作成に関しては平岩恒廣、上田守両氏に全面的に負うている。深く感謝の意を表す。またこの小論を草するに当って終始支援下さりいろいろ教示下さった山崎昭編暦課長、佐藤典彦海洋研究室長、斉藤甫海洋研究室研究官、久保良雄主任天文調査官に感謝の意を表す。

参 考 文 献

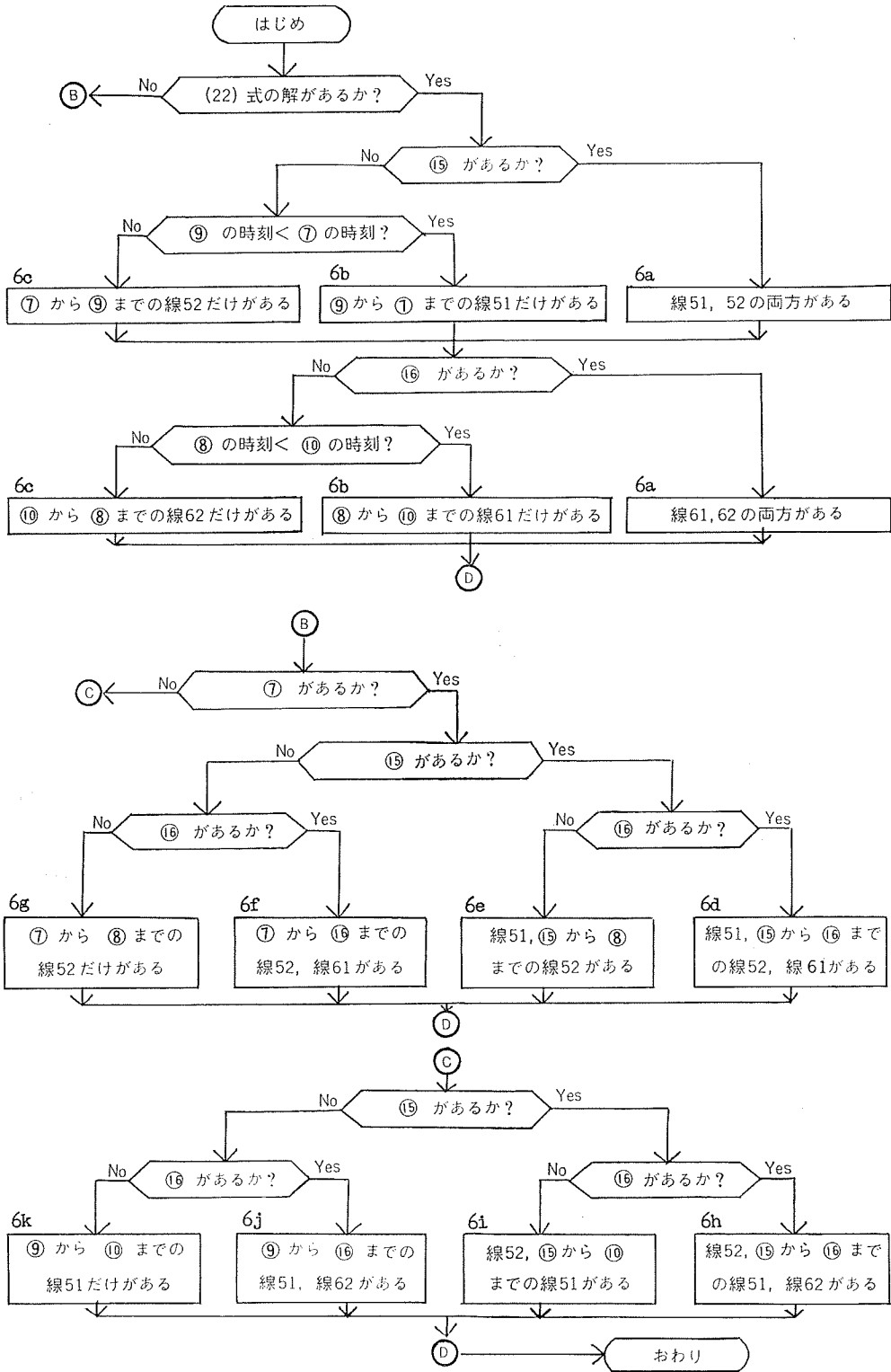
鈴木敬信, 1949: 日食計算論, 恒星社厚生閣, 東京, 5～115ページ

Chauvenet, W, 1908: A Manual of Spherical and Practical Astronomy, vol. I, J. B. Lippincott Co., Philadelphia, pp 436—542

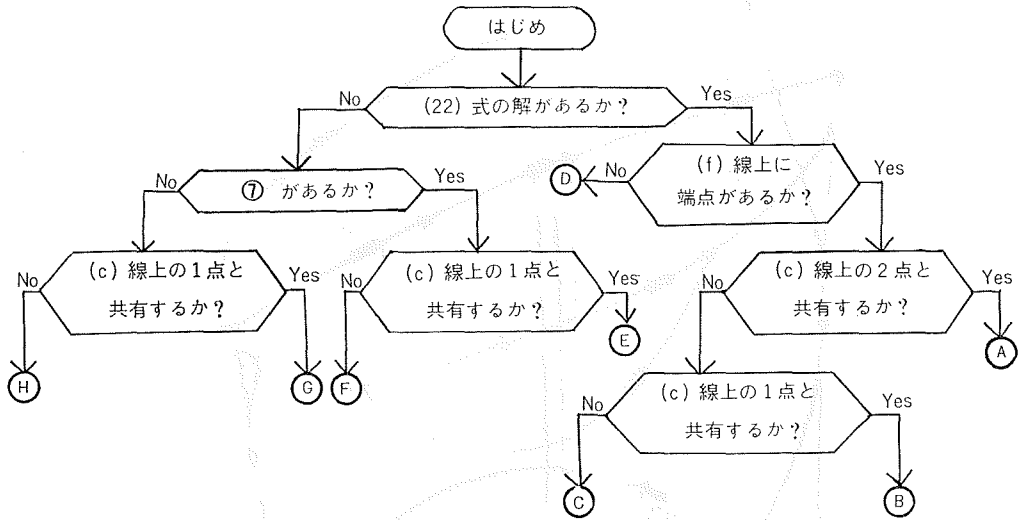
Smart, W. M, 1960: Text-Book on Spherical Astronomy, 4th ed., Cambridge University Press, London, pp 386—401

H. M. Nautical Almanac Office, 1961: Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris, H. M. Stationery Office, London, pp 214—257

流れ図 1 (d) 線の分類のトリー (Figure 6 参照)



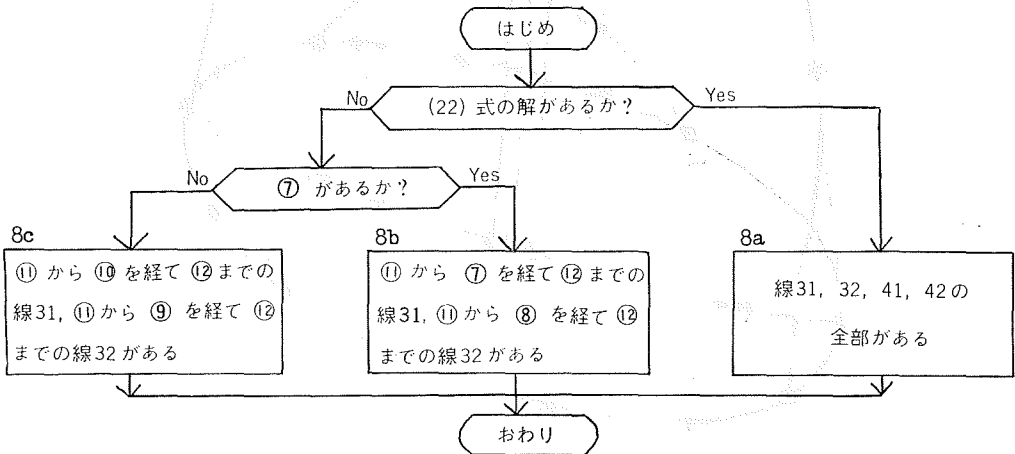
流れ図2 (e) 線の分類のトリー (Figure7参照)



(A)	(f) 線上に両端点をもち、両 (c) 線に接する	7a
(B)	(f) 線上に両端点をもち、(c) 線の一方に接する	7b 7c
(C)	(f) 線上に両端点をもち、(c) 線のどちらにも接しない	7d
(D)	(c) 線上の2点と共有し、両 (c) 線に接する閉曲線となる	7e
(E)	(f) 線上に両端点をもち、北の (c) 線に接する	7f
(F)	(f) 線上に両端点をもち、(c) 線には接しない	7g
(G)	(f) 線上に両端点をもち、南の (c) 線に接する	7h
(H)	(f) 線上に両端点をもち、(c) 線には接しない	7i

おわり

流れ図3 (f) 線の分類のトリー (Figure8参照)



8c
⑪ から ⑩ を経て ⑫ までの
線31, ⑪ から ⑨ を経て ⑫
までの線32がある

8b
⑪ から ⑦ を経て ⑫ までの
線31, ⑪ から ⑧ を経て ⑫
までの線32がある

8a
線31, 32, 41, 42の
全部がある

おわり

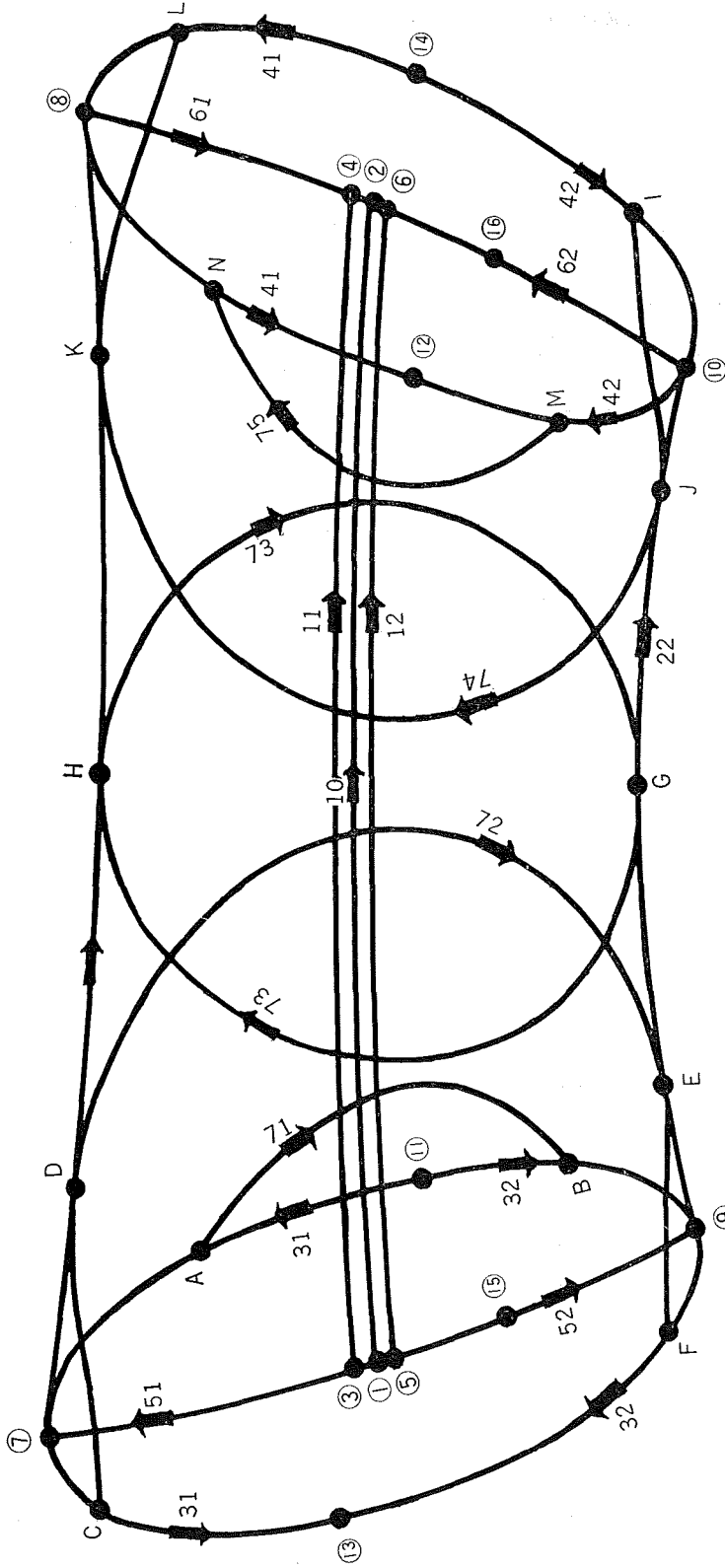


Figure 1

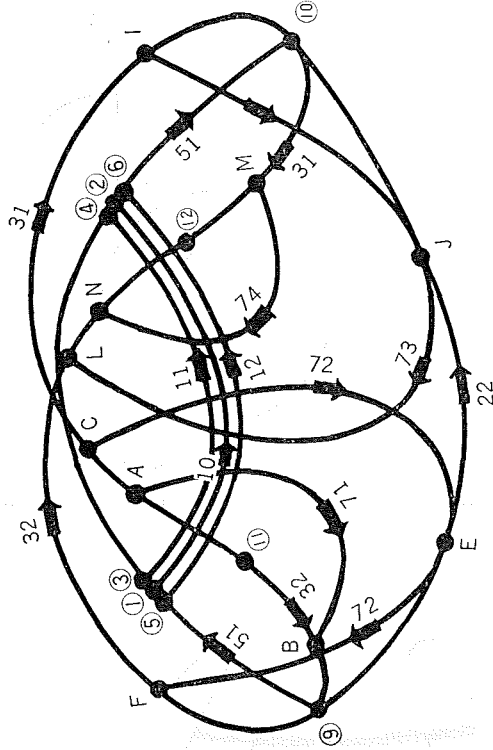


Figure 2

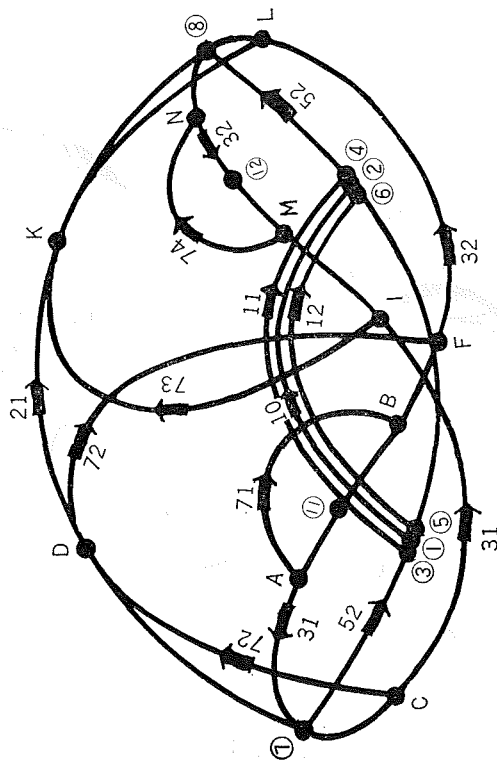


Figure 3

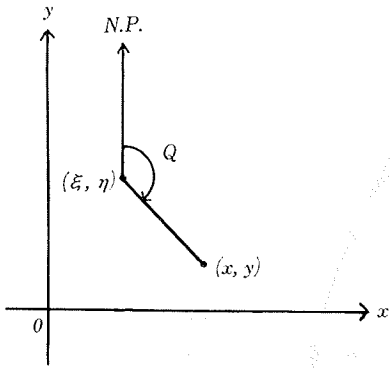


Figure 4a

Q, on the Besselian fundamental plane

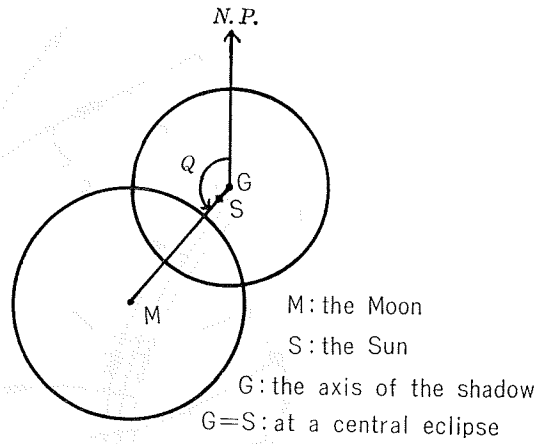
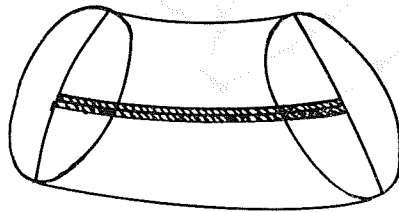
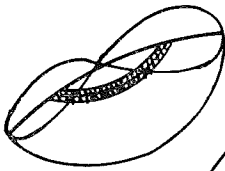


Figure 4b

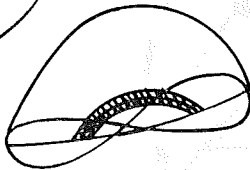
Q, on the celestial sphere



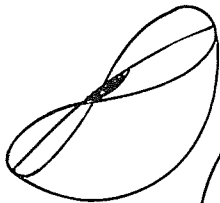
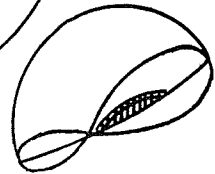
I 型



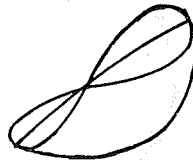
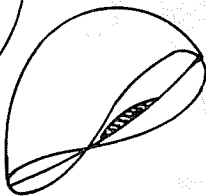
II 型



III 型



IV 型



V 型

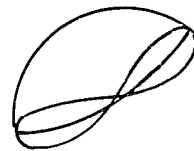


Figure 5

(d) の分類

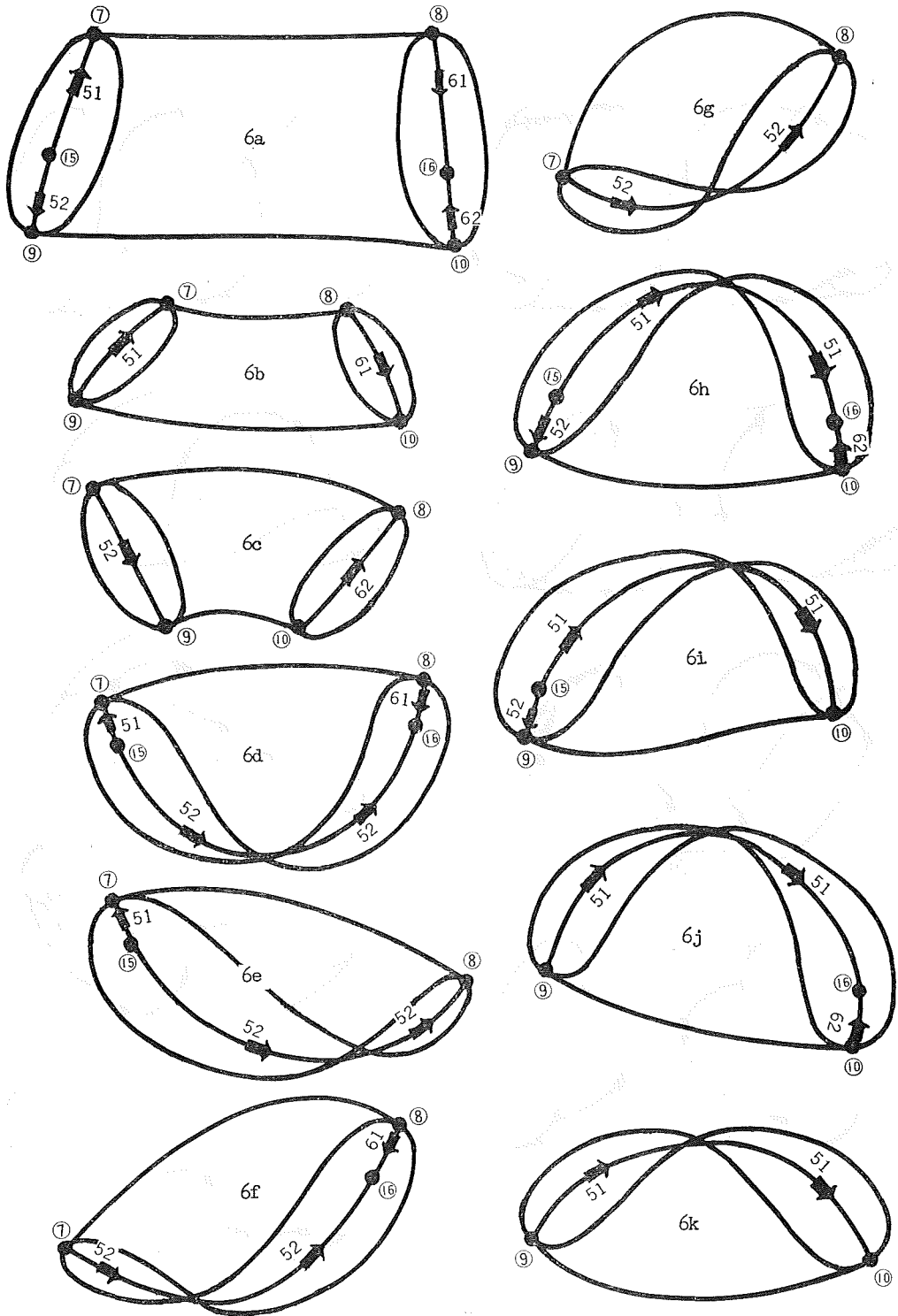


Figure 6

(e) の分類

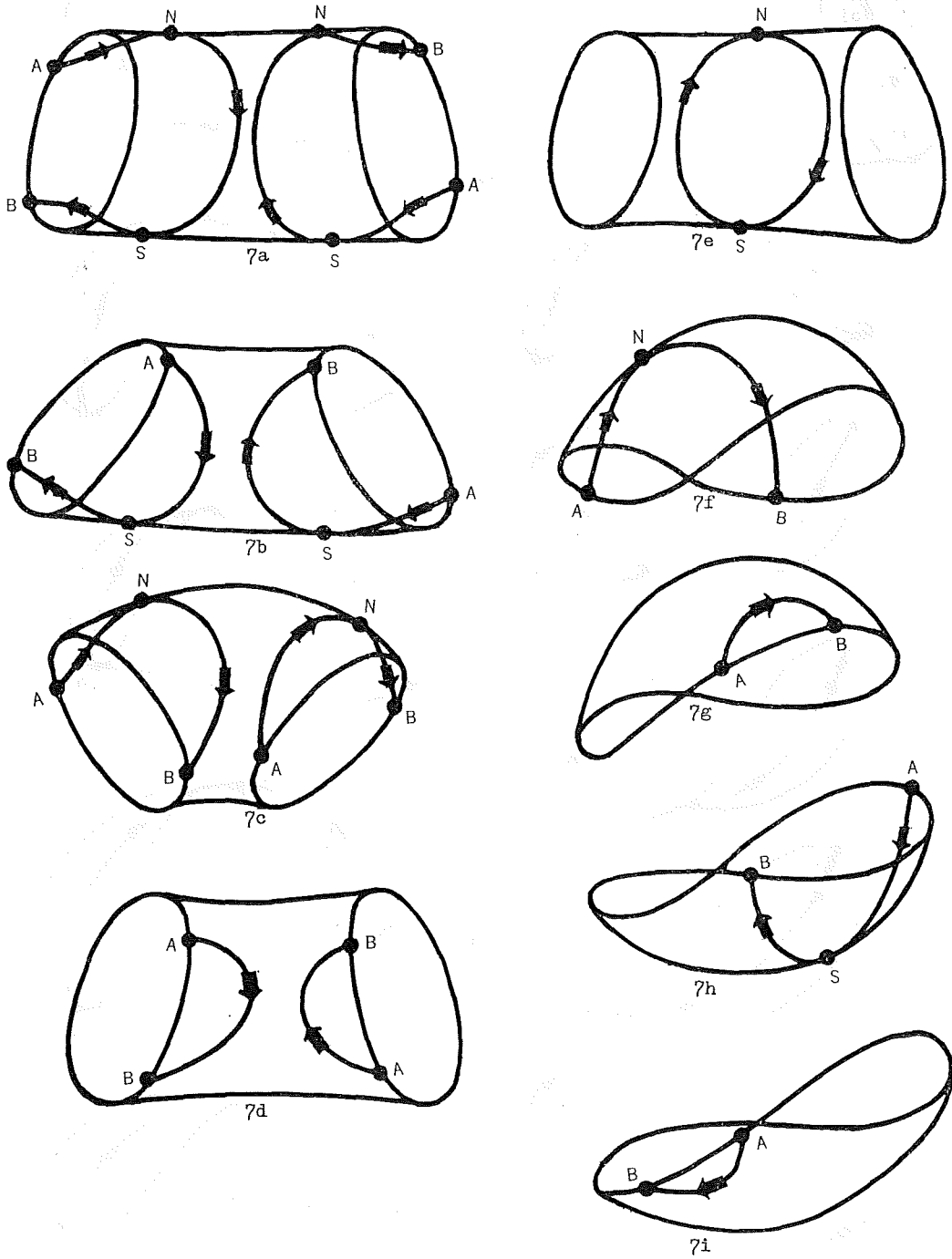


Figure 7

(f) の分類

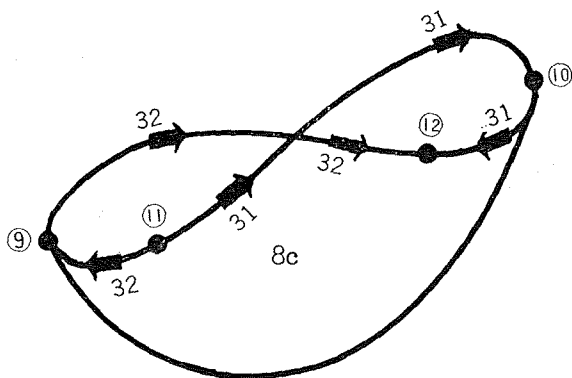
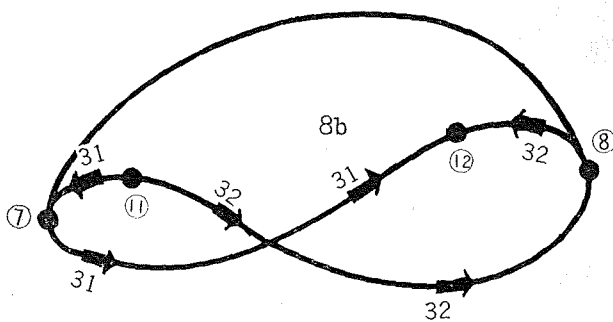
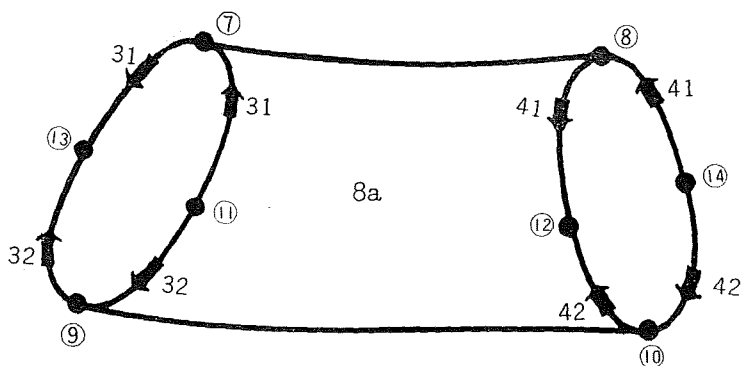


Figure 8

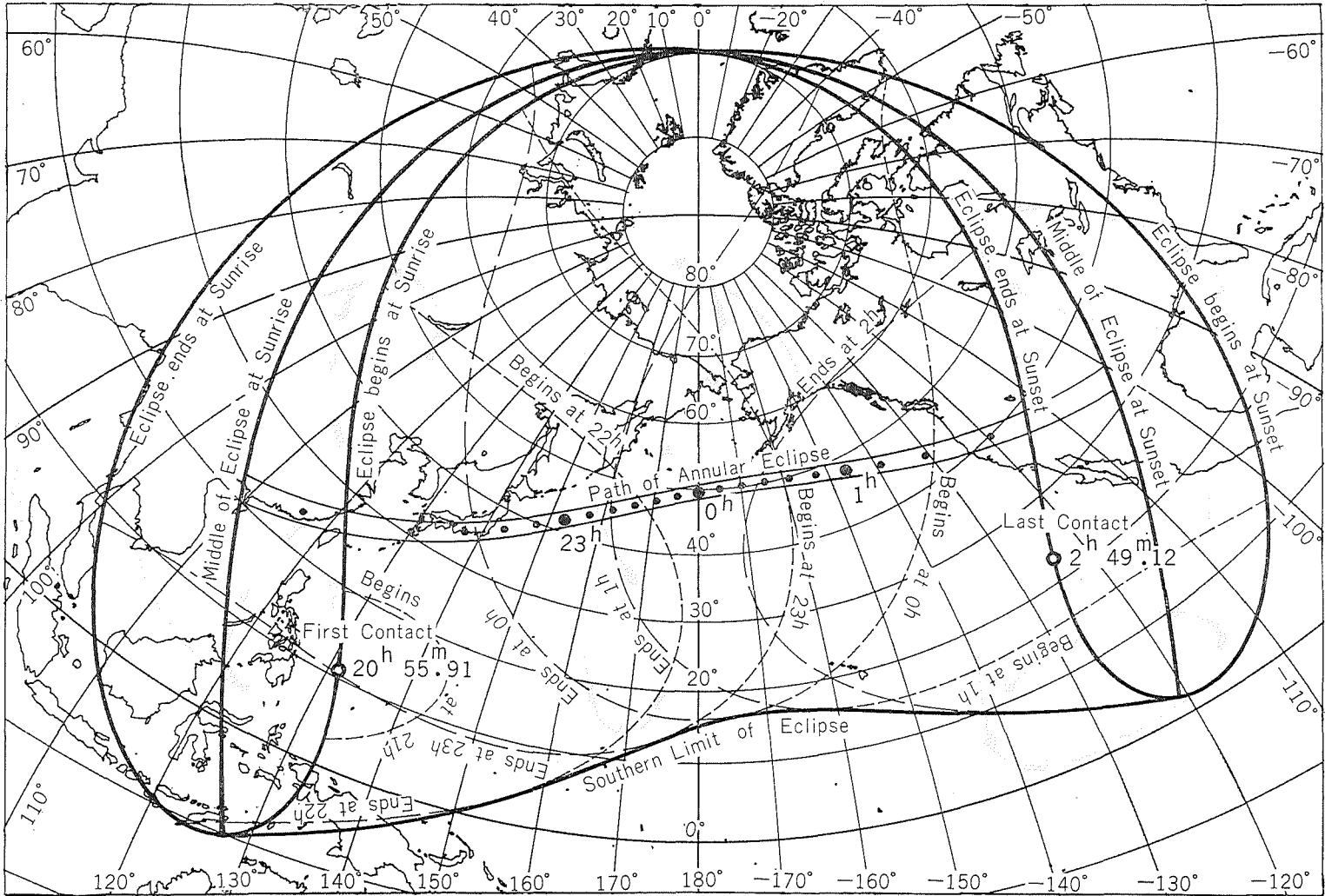


Figure 9

2012 May 20, 21 Annular Eclipse

U.T. $\Delta T = 80^s$